双曲型特異摂動解の漸近展開について(代数解析学の諸相)

内山, 康一

数理解析研究所講究録
660巻 1988年 64-83

双曲型特異摂動解の漸近展開について

上智大 理工 内山康一 (Kôichi Uchiyama)

§1. 序.

微小パラメーター ε が 0 に縮退するとき微分方程式の階数が低下する，いわゆる特異摂動については種々の立場から多くの研究があるが，[*)] 双曲型方程式が低階の双曲型方程式に縮退する型については一般的研究が少ないようである．ここでは n 次元ユークリッド空間上の線形高階単独の規則的双曲型方程式の初期値問題の特異摂動とその漸近解を L^2 理論によって論じる．これは初期値・境界値問題を考えるときの基礎となるであろう．

簡単な例で問題を説明しよう．(Whitham [10], [11])．

$$(1)\quad \begin{cases} Pu = \{\varepsilon(\partial_t - \varphi_1\partial_x)(\partial_t - \varphi_2\partial_x) + (\partial_t - \psi_1\partial_x)\}u = f \\ u(0,x) = g_0(x), \quad u_t(0,x) = g_1(x) \end{cases}$$

において，ε は正の微小パラメーター，φ_i，ψ_1 は実定数とする．応用に現われる方程式では ε が媒質によって定まる微小定数で，(1) の近似方程式として

---

*) 例えば 伊藤正幸「特異摂動論における漸近展開法」数学 $\underline{\underline{38}}$. 2, 150-164 (1986)

$$(2)\quad \begin{cases} (\partial_t - \psi_1 \partial_x)\, v = f \\ v(0,x) = g_0(x) \end{cases}$$

を考える．$\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ は異なるとする．（$\varphi_1 < \varphi_2$ とする）．

a) $\varphi_1 < \psi_1 < \varphi_2$ ならば，$\forall t_0 > 0$ を固定すると $t \geqq t_0$ で $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u(t,x;\varepsilon) = v(t,x)$.

b) $\psi_1 < \varphi_1$，あるいは $\varphi_2 < \psi_1$ ならば一般に $u(t,x;\varepsilon)$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき有界でない．従って収束しない．

c) 階数が1低下したので初期条件が(2)では一つ減っている．a)の場合でも，$t \geqq 0$ で収束させるためには，$\varepsilon \downarrow 0$ で

$$\{\varepsilon(\partial_t - \varphi_1 \partial_x)(\partial_t - \varphi_2 \partial_x) + (\partial_t - \psi_1 \partial_x)\} w \to 0$$

$$v(0,x) + w(0,x;\varepsilon) \to g_0(x)$$

$$v_t(0,x) + w_t(0,x;\varepsilon) \to g_1(x)$$

$$w(t,x;\varepsilon) \to 0 \qquad (\forall t_0 \leq t)$$

をみたすような修正項 $w(t,x;\varepsilon)$（境界層 boundary layer term とよばれるものと本質的に同じ）を必要とする．

<u>問題</u> 空間 n 次元，高階の双曲型方程式の場合，退化方程式の解が元の方程式の解の $\varepsilon \downarrow 0$ の極限になるのはどういうときか．そのとき，上の v, w を展開の第一項とするような ε に関する高次の漸近展開ができることを示せ．

注意．退化方程式が原方程式を近似するという考えは，特異性の伝播という幾何的，定性的な定式化では捕えられない。

エネルギーの伝播というべきL^2的・定量的な扱いを必要としている。以下の議論の結論として，退化方程式（双曲型）で支配される波動に対し，適当な条件（分離条件… $\varphi_1 < \psi_1 < \varphi_2$ の一般化）のもとで高階の双曲型作用素が消散(dissipative)・あるいは分散的(dispersive)摂動項として働くことを見るであろう。

§2. 分離条件

G.B. Whitham は [10] で $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ のとき定数係数の単独高階方程式の場合，次の場合Ⅰへ一般化されることを指摘し，T.T. Wu がⅡ，Ⅲとその欠を補った [12].

(1) $P(D;\varepsilon) = (i\varepsilon)^\nu \prod_{j=1}^{m+\nu}(D_t - \varphi_j D_x) + m_0 \prod_{j=1}^{m}(D_t - \psi_j D_x)$ *)

とする。ここで ν は自然数，m_0 は複素定数，φ_j, ψ_k は異なる実数定数とする。その特性多項式を

(2) $p[\tau] = (i\varepsilon)^\nu \prod_{j=1}^{m+\nu}(\tau - \varphi_j \xi) + m_0 \prod_{j=1}^{m}(\tau - \psi_j \xi)$

とする。Whitham と Wu の抽出したのは次の場合である。

Ⅰ) $\nu = 1$ で，条件 $\begin{cases} (E) & \mathrm{Re}\, m_0 > 0 \\ (S) & \varphi_1 < \psi_1 < \varphi_2 < \cdots < \psi_m < \varphi_{m+1}. \end{cases}$

Ⅱ) $\nu = 1$ で，条件 $\begin{cases} (SP) & \mathrm{Re}\, m_0 = 0, \quad \mathrm{Im}\, \psi_0 > 0 \\ (WSP) & \varphi_1 < \{\psi_1, \varphi_2\} < \cdots < \{\psi_{m-1}, \varphi_m\} < \{\psi_m, \varphi_{m+1}\} \end{cases}$ **)

---

*) $D_t = \partial / i\partial t$, $D_x = \partial / i\partial x$ **) $\{a, b\} < \{c, d\} \underset{def}{\Longleftrightarrow} \max\{a, b\} < \min\{c, d\}$

あるいは　条件$\begin{cases} \text{(SN)} & \mathrm{Re}\, m_0=0,\ \mathrm{Im}\, m_0<0 \\ \text{(WSN)} & \{\varphi_1,\psi_1\}<\{\varphi_2,\psi_2\}<\cdots<\{\varphi_m,\psi_m\}<\varphi_{m+1} \end{cases}$

III）$\nu=2$で，条件$\begin{cases} \text{(P)} & m_0>0 \\ \text{(WS)} & \varphi_1<\{\varphi_2,\psi_1\}<\cdots<\{\varphi_{m+1},\psi_m\}<\varphi_{m+2} \end{cases}$

このとき $p[\tau]=0$ の根はすべての実パラメーターξに対し，

I）⇒ 虚部 $\mathrm{Im}\,\tau>0$　（消散型とよびたい）

II），III）⇒ τはすべて実根　（分散型とよびたい）

さらに，$\nu\geqq 3$ならば（$m_0\neq 0$として）必ず$\mathrm{Im}\,\tau<0$となる根があることがわかる．$\nu=1,2$のときは，I），II），III）の条件で不等号の向きを逆にすると$\mathrm{Im}\,\tau>0$となる根が生じる．$P(D;\varepsilon)u=0$の指数関数解を考えるならば，I）II）III）が$\varepsilon\downarrow 0$のとき$t\geqq 0$で適当な意味で退化方程式の解に収束する条件を与えていることが期待される．

I）の条件（S）は，Lerayによって独立に狭双曲型のエネルギー不等式を導く部分積分法の研究の中で得られていた（例えば［7］）．xが高次元で変数係数の場合に分離条件が漸近展開の誤差評価を与える（十分）条件を与えることを示すのが本論文の目標である．同じ考えはDzavadov［2］，Gao［4］で実行されている．［2］ではI）のみ［4］ではI）III）が扱われているが，エネルギー不等式（Gårding）の結果を直接適用できることを仮定している．ここでは，擬微分

作用素に対してGårdingの不等式を示したので，分離条件の意義をより明確にすることができた．

J. Chaillouは単独高階定数係数双曲型作用素の特異摂動を基本解の $\varepsilon\downarrow 0$ に対する収束の立場で論じた（[1]）．空間次元1の場合は R. Geel [5]，E.M. de Jager [6] などの仕事がある．

§3. Gårding-Leray型 不等式．

t, εをパラメーターとする $\mathbb{R}^n_x$ 上の有界係数の擬微分作用素を用いる．

定義　$S^m \ni a(t, x, \xi; \varepsilon)$ とは $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi\times[0, \varepsilon_0]$　$(\varepsilon_0>0)$ 上の C^∞ 関数で

$$(1)\quad \sup_{t,x,\varepsilon} |\partial_\varepsilon^j \partial_\xi^\alpha \partial_t^k \partial_x^\beta a(t,x,\xi;\varepsilon)| \le C_{j,\alpha,k,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \qquad (\forall \xi\in\mathbb{R}^n)$$

をみたすものをいう．m次のシンボルという．ふつうに同次シンボルを定義し，以下では同次シンボルを主シンボルにもつものしか考えない．対応する擬微分作用素（ΨDO）を $a(t, x, D_x; \varepsilon)$ とし，全体を $O_p{}^m$ とかく．以下では

$$(2)\quad \begin{cases} L(t,x,D_t,D_x;\varepsilon)=\sum_{j=0}^{m} A_j(t,x,D_x;\varepsilon)D_t^{m-j} \\ A_j\in O_p{}^{j+r} \end{cases}$$

の形の作用素を扱う．これら全体を $Op(m, r)$とかき，

$Op(m,0)$ は単に $Op(m)$ ともかく．τ の多項式

(3) $$\ell(t,x,\tau,\xi;\varepsilon)=\sum_{j=0}^{m}a_j(t,x,\xi;\varepsilon)\tau^{m-j}$$

を，a_j が A_j の(主)シンボルであるとき L の(主)シンボルという．

m 次のシンボル $a(t,x,\xi;\varepsilon)$ が一様に正

$$a>0\quad(\text{一様})$$

とは，a の主シンボルに対して，

(4) $$\inf_{t,x,\varepsilon,|\xi|=1} a_m(t,x,\xi;\varepsilon)\geqq\delta>0$$

となる正定数 δ が存在することとする．

以後用いられる $L\in Op(m+\nu,0)$，$M\in Op(m;r)$ の仮定をのべる．$r\geqq0$ とする．ν は自然数（とくに 1 または 2）．

(5) $$\begin{cases} L(t,x,D_t,D_x;\varepsilon)=D_t^{m+\nu}+\displaystyle\sum_{j=1}^{m+\nu}L_j(t,x,D_x;\varepsilon)D_t^{m+\nu-j} \\ L_j\in Op^j \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} M(t,x,D_t,D_x;\varepsilon)=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}M_j(t,x,D_x;\varepsilon)D_t^{m-j} \\ M_j\in Op^{j+r} \end{cases}$$

とし，L と M の主シンボルをそれぞれ

(7) $$\ell(t,x,\tau,\xi;\varepsilon)=\tau^{m+\nu}+\sum_{j=1}^{m+\nu}a_j(t,x,\xi;\varepsilon)\tau^{m+\nu-j}$$

(8) $$m(t,x,\tau,\xi;\varepsilon)=\sum_{j=0}^{m}m_j(t,x,\xi;\varepsilon)\tau^{m-j}$$

とする．次を仮定する．

（H0）Lは規則的双曲型である．すなわち，因数分解

$$(9)\quad \ell(t,x,\tau,\xi;\varepsilon)=\prod_{j=1}^{m+\nu}(\tau-\varphi_j(t,x,\xi;\varepsilon))$$

ができて，$\varphi_j(t,x,\xi;\varepsilon)$は1次の同次シンボルであって，

$$(10)\quad \varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_{m+\nu}\qquad(一様)$$

である．

（H1）Mは規則的双曲型である．すなわち，因数分解

$$(11)\quad m(t,x,\tau,\xi;\varepsilon)=m_0(t,x,\xi;\varepsilon)\prod_{j=1}^{m}(\tau-\psi_j(t,x,\xi;\varepsilon))$$

ができて m_0 は M_0 の主シンボルであり，ψ_j は1次の同次シンボルであって

$$(12)\quad \psi_1<\psi_2<\cdots<\psi_m\qquad(一様)$$

とする。

さらにこの節では

（P0）$M_0(t,x,D_x;\varepsilon)\in Op^r$ は $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ 上で形式的自己共役で，シンボルは一様に正で，M_0の逆が Op^{-r} の元として存在するとする．

および，$\nu=1$であって，

（S0）特性根$\{\psi_j\}$は$\{\varphi_j\}$を分離する。すなわち，

$$(13)\quad \varphi_1<\psi_1<\varphi_2<\psi_2<\cdots<\psi_m<\varphi_{m+1}\quad(一様)$$

とする．

ノルムの記号. $\|\cdot\|_s^2$ を $\mathbb{R}_x^n$ 上の s 次のソボレフノルムとする. $u(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{t,x}^{n+1})$ に対して,

$$\|D^k u(t)\|_q^2 = \sum_{j=0}^{k} \|D_t^j u(t,\cdot)\|_{k+q-j}^2$$

と定義する.

次の命題は基本的である. (坂本 [9] 参照).

命題 1. $L \in Op(m+1, 0)$ と $M \in Op(m, r)$ は仮定 (H0), (H1), (P0) と (S0) をみたすとする. そのとき $u(t,\cdot) \in C^\infty([0,s]; C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n))$ に対し,

$$\begin{aligned} &-\mathrm{Im}\int_0^s (Lu(t), Mu(t))\,dt \\ &\geqq c_0\|D^m u(s)\|_{r/2}^2 - C\Big\{\|D^{m-1}u(s)\|_{r/2}^2 + \\ &\quad + \|D^m u(0)\|_{r/2}^2 + \int_0^s \|D^m u(t)\|^2 dt\Big\}. \end{aligned}$$

証明の要点. シンボルのパラメーター t, ξ を略する. L の主シンボルを改めて

$$a^{(0)}(\tau) = \tau^{m+1} + a_1^{(0)}(x,\xi)\tau^m + \cdots + a_{m+1}^{(0)}(x,\xi)$$

M の主シンボルを改めて

$$a^{(1)}(\tau) = a_0^{(1)}(x,\xi)\tau^m + \cdots + a_m^{(1)}(x,\xi)$$

とおく. τ の多項式としてユークリッドの互除法により $a^{(0)}(\tau)$ と $a^{(1)}(\tau)$ から始めて帰納的に商 $q^{(j)}(\tau)$ と負の剰余 $a^{(j)}(\tau)$ $(j=1,2,\cdots,m+1)$ を

$$a^{(j)}(\tau) = q^{(j-1)}(\tau)\,a^{(j-1)}(\tau) - a^{(j-2)}(\tau) \qquad j=2,\cdots,m+2$$

$$(\text{ただし } a^{(m+2)}(\tau) = 0 \text{ とする}).$$

で定める．多項式 $q^{(j)}(\tau)$, $a^{(j)}(\tau)$ の係数を

$$q^{(j)}(\tau) = q_0^{(j)}(x,\xi)\tau + q_1^{(j)}(x,\xi)$$

$$a^{(j)}(\tau) = a_0^{(j)}(x,\xi)\tau^{m+1-j} + \cdots + a_{m+1-j}^{(j)}(x,\xi)$$

とおく．このとき，

(i) $q_0^{(j)}(x,\xi)$ は一様に正な実の同次シンボルで次数は j の偶奇に従って $r-2$ または $-r$ である．

(ii) $q_1^{(j)}(x,\xi)$ は実の同次シンボルでその次数は j の偶奇に従って $r-1$, $-r+1$ である．

(iii) $a_k^{(j)}(x,\xi)$ は実の同次シンボルで次数は j の偶奇に従って $j+k$, $r+j+k-1$ であり，さらに $a_0^{(j)}(x,\xi)$ は一様に正である．

(iv) $a^{(j)}(\tau) = 0$ は $m+1-j$ 個の異なる実根で

$$(\mathrm{H}j): \quad \tau_1^{(j)}(x,\xi) < \cdots < \tau_{m+1-j}^{(j)}(x,\xi) \quad (\text{一様})$$

になるものをもち，$\{\tau_l^{(j-1)}\}$ は $\{\tau_l^{(j)}\}$ によって一様に分離される．すなわち

$$(\mathrm{S}_{j-1}): \tau_1^{(j-1)}(x,\xi) < \tau_1^{(j)}(x,\xi) < \cdots\cdots < \tau_{m+1-j}^{(j-1)}(x,\xi) \quad (\text{一様}).$$

などがわかる．(iii) と (iv) における一様評価は，シンボルが t, x についてコンパクト台を仮定してないので，自明ではない．初等代数的考察から従う．

つぎに，上記のシンボルの互除を ΨDO の枠で行う．

$$-2\,\mathrm{Im}\int_0^s (Lu(t),\ Mu(t))\,dt$$
$$= -2\,\mathrm{Im}\int_0^s (Q^{(1)}A^{(1)}u(t),\ A^{(1)}u(t))\,dt$$
$$-2\,\mathrm{Im}\int_0^s (A^{(1)}u(t),\ A^{(2)}u(t))\,dt.$$

$$|\text{右辺の第一項}| \geqq (Q_0^{(1)}A^{(1)}u(s),\ A^{(1)}u(s)) - \|D^m u(0)\|_{r/2}^2 - C\int_0^s \|D^m u(t)\|_{r/2}^2\,dt.$$

右辺の第二項も同様に展開評価する．これをくり返して，

$$-2\,\mathrm{Im}\int_0^s (Lu(t),\ Mu(t))\,dt \geqq$$
$$\geqq \sum \mathrm{Re}\,(Q_0^{(j)}A^{(j)}u(s),\ A^{(j)}(s)) - C\|D^m u(0)\|_{r/2}^2 - C\int_0^s \|D^m u(t)\|_{r/2}^2\,dt.$$

シンボルの一様正という性質をGårdingの楕円型不等式に結びつけて求める評価を得る．

命題1からΨDO係数のGårding-Leray型不等式を得る．

定理1．命題1と同じ仮定のもとで，正定数c_0, C, γ_0が存在して，任意の$T>0$，$\gamma \geqq \gamma_0$に対し，

$$-\mathrm{Im}\int_0^T e^{-2\gamma t}(Lu(t),\ Mu(t))\,dt$$
$$\geqq c_0\gamma\int_0^T e^{-2\gamma t}\|D^m u(t)\|_{r/2}^2\,dt$$
$$+ c_0 e^{-2\gamma T}\|D^m u(T)\|_{r/2}^2 - C\|D^m u(0)\|_{r/2}^2.$$

注意．これからただちに，$Lu=f$に対するコーシー問題のエネルギー不等式が得られる．しかし，それだけのためな

ら，周知のように，連立系に直して対角化することによりΨDO係数でもエネルギー不等式が容易に得られる．ここではあとで，εに対する依存性を明確にしたエネルギー不等式を必要とするので，Leray〔7〕の結論をΨDOに対してやり直したのである．

§4．解のア・プリオリ評価．

記号は前節に従う．$L\in Op(m+\nu)$，$M\in Op(m)$ $(r=0)$ とし，M_0はかけ算作用素$m_0(t,x;\varepsilon)$とする（簡単のため）．主定理（H0）（H1）を仮定する．$\nu=1$または2とする．§2のI）II）III）の仮定において，m_0，φ_j，ψ_kを関数によみかえ，不等号は一様評価とみなす．このとき，I〜IIIに応じて，定数c，C，γ_0が存在して，任意の$\gamma\geqq\gamma_0$と$u(t)\in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n))$に対し，

I）
$$C\Big\{\frac{1}{\gamma}\int_0^T e^{-2\gamma t}\,\frac{1}{\varepsilon}\|Pu(t)\|^2dt+\varepsilon\|D^m u(0)\|^2+\gamma\|D^{m-1}u(0)\|^2\Big\}\geqq c\Big\{\gamma\int_0^T e^{-2\gamma t}(\varepsilon\|D^m u(t)\|^2+\gamma\|D^{m-1}u(t)\|^2)dt+e^{-2\gamma T}(\varepsilon\|D^m u(T)\|^2+\gamma\|D^{m-1}u(T)\|^2)\Big\}.$$

II）
$$C\Big\{\frac{1}{\gamma}\int_0^T e^{-2\gamma t}\,\frac{1}{\varepsilon}\|Pu(t)\|^2dt+\varepsilon\|D^m u(0)\|^2+\|D^{m-1}u(0)\|^2_{1/2}\Big\}\geqq c\Big\{\gamma\int_0^T e^{-2\gamma t}(\varepsilon\|D^m u(t)\|^2+$$

$$+\|D^{m-1}u(t)\|^2_{1/2})dt + e^{-2\gamma T}(\varepsilon\|D^m u(T)\|^2 + $$
$$+\|D^{m-1}u(T)\|^2_{1/2}).$$

III) $$C\left\{\frac{1}{\gamma}\int_0^T e^{-2\gamma t}\frac{1}{\varepsilon^2}\|Pu(t)\|^2 dt + \varepsilon^2\|D^{m+1}u(0)\|^2 + \right.$$
$$\left.+\|D^m u(0)\|^2\right\} \geqq C\left\{\gamma\int_0^T e^{-2\gamma t}(\varepsilon^2\|D^{m+1}u(t)\|^2 + \right.$$
$$+\|D^m u(t)\|^2)dt + e^{-2\gamma T}(\varepsilon^2\|D^{m+1}u(T)\|^2 +$$
$$+\|D^m u(T)\|^2).$$

注意．εやγの冪については少しちがう形がいろいろ得られるが応用上は大差ない．高次微分はε冪の損失を伴う形で定理から得られる．

証明の方針．

I) $\mathrm{Re}\int_0^T e^{-2\gamma t}(Pu(t), Mu(t))dt$ を評価する．

II) (SP) (WSP) のとき，同次シンボル $\chi_j \in S^1$ が存在して
$$\varphi_1 < \chi_1 < \cdots\cdots < \chi_{m-1} < \varphi_m < \chi_m < \varphi_{m+1}$$
$$\chi_1 < \psi_1 < \cdots\cdots\cdots < \chi_m < \psi_m$$
が一様に成立する． $\prod_{j=1}^{m}(\tau - \chi_j(t,x,\xi))$ に対応する作用素 Bを用いて $-\mathrm{Im}\int_0^T e^{-2\gamma t}(Pu(t), Bu(t))dt$ を計算する．

III) (WS) より同次シンボル $\chi_j \in S^1$ が存在して
$$\varphi_1 < \chi_1 < \varphi_2 < \cdots\cdots < \chi_{m+1} < \varphi_{m+2}$$
$$\chi_1 < \psi_1 < \cdots\cdots < \psi_m < \chi_{m+1}$$
と一様に分離できる． $\prod_{j=1}^{m+1}(\tau - \chi_j(t,x,\xi))$ に対応する作用素を使う．

§5. 解の漸近展開.

以下，L，M は微分作用素で (H0) (H1) を仮定する．
さらに，作用素を ε について Taylor 展開して記号が繁雑になるのをさけて，L，M の係数は ε に依存しないとする．

初期値問題

$$(1)\quad \begin{cases} Pu = ((i\varepsilon)^{\nu}L+M)\,u(t,x;\varepsilon) = f(t,x;\varepsilon) \\ u(0,x) = g_0(x;\varepsilon),\ \cdots,\ D_t^{m+\nu-1}u(0,x;\varepsilon) = g_{m+\nu-1}(x;\varepsilon) \end{cases}$$

を考える．$f(t,x;\varepsilon)$，$g_j(x;\varepsilon)$ $(0\leq j\leq m+\nu-1)$ は $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ について C^∞ 級でコンパクト台をもつとする．

次のような解 u の形式展開を考える．

$$(2)\quad u(t,x;\varepsilon) \sim \underbrace{\sum_{n\geq 0}\varepsilon^n v_n(t,x)}_{\text{(正則部分)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n w_n(t,x;\varepsilon)}_{\text{(特異部分)}} .$$

ここで，右辺第一項の形式和を v，二番目の形式和を w とおくとき，方程式

$$(3)\quad \begin{cases} ((i\varepsilon)^{\nu}L+M)v \sim f \\ ((i\varepsilon)^{\nu}L+M)w \sim 0 \end{cases}$$

および初期条件

$$(4)\quad \begin{cases} (v+w)(0,x;\varepsilon) \sim g_0(x;\varepsilon) \\ \vdots \\ D_t^{m+\nu-1}(v+w)(0,x;\varepsilon) \sim g_{m+\nu-1}(x;\varepsilon) \end{cases}$$

をみたすように $\{v_n(t,x)\}$, $\{w_n(t,x;\varepsilon)\}$ を構成する.
$t>0$ に対し, 適当な意味で

(5) $\quad \varepsilon^{j+k+|\beta|}\partial_\varepsilon^j\partial_t^k D_x^\beta w_n(t,x;\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon\to 0)$

であれば, w は初期面の近傍に主要部分が集中した修正項 (initial layer term) ということができよう.

以下その手順を略述する.

I) の場合. $\nu=1$ である.

① 正則部分 $v\sim\sum\varepsilon^n v_n$ を定める方程式は (3) から

$$(6)\begin{cases} M v_0 = f_0 \\ M v_n = f_n - i L v_{n-1} \qquad n\geq 1\end{cases}$$

ただし, $\quad f(t,x;\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^n f_n(t,x)$ である.

仮定 (H1) から, m 個のコーシー条件を与えれば各 v_n が定まる.

② 特異部分 $w\sim\sum\varepsilon^n w_n$ を定める方程式は (3) の w の式に $(i\varepsilon)^m$ をかけ,

(7) $\quad s=t/\varepsilon, \quad \partial/\partial s = \varepsilon\partial_t$

でかき直すと, $\tilde{w}(s,x;\varepsilon)\ (=w(t,x;\varepsilon)\sim\sum_n\tilde{w}_n(\frac{t}{\varepsilon},x)\varepsilon^n)$ に対し,

(8) $\quad \tilde{P}(s,x,\partial_s,D_x;\varepsilon)\,\tilde{w}(s,x;\varepsilon)\sim 0$

を得る. ここで

(9) $\quad \tilde{P}(s,x,\partial_s,D_x;\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\tilde{P}^{(n)}(s,x,\partial_s,D_x)$

とおくと,

$$(10)\quad \tilde{P}^{(0)}(s,x,\partial_s,D_x)=\partial_s^{m+1}+m_0(0,x)\partial_s^{m}$$

という s についての定係数の常微分作用素であり，$\tilde{P}^{(j)}$ $(j\geq 1)$ は s の（高々 j 次）多項式を係数とする偏微分作用素である。

$\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\tilde{w}_n$ を定める方程式は (8), (9) から

$$(11)\left\{\begin{array}{l}\tilde{P}^{(0)}\tilde{w}_0=\left(\partial_s^{m+1}+m_0(0,x)\partial_s^{m}\right)\tilde{w}_0(s,x)=0\\ \left(\partial_s^{m+1}+m_0(0,x)\partial_s^{m}\right)\tilde{w}_j(s,x)=-\sum_{l=0}^{j-1}\tilde{P}^{(j-l)}\tilde{w}_l(s,x)\\ \qquad\qquad j\geq 1\end{array}\right.$$

である。

③初期条件 $D_t^j(v+w)(0,x;\varepsilon)=g_j(x;\varepsilon)$ ((4)) に $(i\varepsilon)^j$ をかけて，$D_t^j w$ について $s=t/\varepsilon$ の変換を行うと，

$$(12)\left\{\begin{array}{l}\varepsilon^j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j v(0,x;\varepsilon)+\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^j\tilde{w}(0,x;\varepsilon)=(i\varepsilon)^j g_j(x;\varepsilon)\\ j=0,1,\cdots,m.\end{array}\right.$$

従って，

$$(13)\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^j v_n}{\partial t^j}(0,x)+\frac{\partial^j\tilde{w}_{n+j}}{\partial s^j}(0,x)=i^j g_{j,n}(x)\\ \forall n\geq 0,\quad j=0,1,\cdots,m.\end{array}\right.$$

①〜③を連立させて $\{v_n\}$ $\{\tilde{w}_n\}$ を決定する。

$$\tilde{w}_0=\tilde{w}_1=\cdots=\tilde{w}_{m-1}(s,x)\equiv 0$$

にとる。(w の寄与をなるべく小さくしたいのと，こうとっても漸近解が構成できることが以下からわかる。常微分方程式の初期値問題についてはより体系的に吉川 [13] で漸近解が構

成されている.)

このとき, まず $v_0(t,x)$ が初期条件 (13) $n=0$, $j=0,1,\cdots,m-1$ と方程式 (6) $Mv_0=f_0$ から一意に定まる. 仮定から $v_0(t,x)\in C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ である.

つぎに, $\tilde{w}_m(s,x)$ が初期条件 (13) $n=0$, $j=m$ と s の多項式解を含まないという条件と方程式 (11) から

$$\tilde{w}_m(s,x) = C(x)\, e^{-m_0(0,x)s}$$

の形になる. 実際, $C(x)$ は仮定 (E) のおかげで (13) から一意に定まる. この手順をくり返すことができて, 以下 v_1, $\tilde{w}_{m+1}$, v_2, $\tilde{w}_{m+2}$, $\cdots$ と定まる. $\tilde{w}_{m+j}(s,x)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ 係数の s の多項式 $\times\, e^{-m_0(0,x)s}$ の形をしている. (E) からこれは $x\in\mathbb{R}^n$, $s\geqq 0$ で有界である.

誤差評価.

$$R_{N+1}(u) = u(t,x;\varepsilon) - \left\{ \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n v_n(t,x) + \sum_{n=m}^{m+N} \varepsilon^n \tilde{w}_n\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) \right\}$$

$$R_{N+1}(f) = f(t,x;\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n f_n(t,x)$$

$$R_{N+1}(g_j) = g_j(x;\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n g_{j,n}(x)$$

とおく.

$$P(R_{N+1}(u)) = R_{N+1}(f) - i\varepsilon^{N+1} L v_N + \varepsilon^{N+1} \times \text{有界関数} \times e^{-m_0(0,x)t/\varepsilon}$$

ゆえに $\| P R_{N+1}(u) \| = O(\varepsilon^{N+1})$.

一方,

初期条件から

$$\| D_t^j \; R_{N+1}(u)\,(0,x;\varepsilon) \|_{m-1-j} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

§4 の定理によって $R_{N+1}(u)$ の A priori評価を求めれば，たとえば

$$(14) \quad c\,\gamma^2 \int_0^T e^{-2\gamma t} \| D^{m-1} \; R_{N+1}(u) \|^2 dt + e^{-2\gamma T} \gamma \| D^{m-1} u(T) \|^2$$
$$\leq C\,\varepsilon^{2N+1}$$

がわかる．

II) の場合．$\nu = 1$．

① 正則部分 $v \sim \Sigma\, \varepsilon^n v_n$ については同じ (6) によって決まる．

②特異部分を I と同じように求めることはできない．なぜなら $m_0(0,x)$は純虚数だから，sの多項式 $\times e^{-m_0(0,x)s}$ は $s \geqq 0$ で一般に有界でないから．そこで，$0<t$ 十分小では

$$(15) \quad w(t,x;\varepsilon) \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \;{}_{n}(t,x)\, e^{\frac{iS(t,x)}{\varepsilon}}$$

の形で求める．（Maslov, Fedoriuk [8]）．

$a_1(t,x) = \mathrm{Im}\; m_0(t,x)$ とおくと，$S(t,x)$のみたすアイコナール方程式は

$$(16) \quad \prod_{j=1}^{m+1} (S_t - \varphi_j(t,x,S_x)) + a_1(t,x) \prod (S_t - \psi_j(t,x,S_x)) = 0$$

であるが，特性多項式

$$(17) \quad p(\tau) = \prod^{m+1} (\tau - \varphi_j(t,x,\xi)) + a_1(t,x) \prod^{m} (\tau - \psi_j(t,x,\xi)) = 0$$

の根は，II) の仮定 (SP) (WSP) のもとで $\xi \neq 0$ では異なる

$m+1$個の実根をもつ．最小根は $\xi=0$ をこめて他の根と一様に分離している．それを $\tau_1(t,x,\xi)$ とすれば $\tau_1 \in S^1$．

$$(18)\begin{cases} S_t - \tau_1(t,x,S_x)=0 \\ S(0,x)=0, \quad S_t(0,x)=-a_1(0,x) \end{cases}$$

で $S(t,x)$ をきめ，幾何光学近似の輸送方程式を解いて h_n が順次求まる．ただし，h_n の初期値が $u \sim v+w$ の初期条件からきまるのは I) と同じである．形式展開ができれば誤差評価は I) と同様。t が大きくなると一般に (15) の表示は有効でなくなる．Maslov の正準作用素 ([3], [8] など) で延長すればよい．

仮定 (SN) (WSN) のもとでも同様である．

III) の場合 $\nu=2$．

① 正則部分の方程式

$$(19)\begin{cases} Mv_0=f_0 \\ Mv_1=f_1 \\ Mv_n=f_n+Lv_{n-2} \qquad n\geq 2 \end{cases}$$

② 特異部分の方程式．

$$w(t,x) \sim \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n\left\{w_{1,n}(t,x)e^{\frac{iS_1(t,x)}{\varepsilon}}+w_{2,n}(t,x)e^{\frac{iS_2(t,x)}{\varepsilon}}\right\}$$

を想定する．特性多項式の根

$$p(\tau)=\prod^{m+2}(\tau-\varphi_j(t,x,\xi))-m_0(t,x)\prod^{m}(\tau-\psi_j(t,x,\xi))=0$$

の最小根 $\tau_1(t,x,\xi)$ と最大根 $\tau_{m+2}(t,x,\xi)$ は $\xi=0$ をこめて

他の根から一様に分離している．τ_1, $\tau_{m+1}\in S'$である．以下 $0<t$ 十分小では幾何光学近似による．方針はIIと同様である．$m(t,x)$ が x に依らなければもっと簡単に扱うこともできる．(Cf. Gao [4]).

文献表

[1] J. Chaillou, Hyperbolic Differential Polynomials and their Singular Perturbations. D. Reidel, 1979

[2] M. G. Dzavadov: A mixed problem for a hyperbolic equation involving a small parameter with leading derivatives. Soviet Math. Doklady **4** [151-153] 1400-1404 (1963)

[3] M. V. Fedoriuk: Singularities of Fourier Integral Operators and Asymptotic Solutions of Mixed Problems. Russian Math. Surveys **32**. 6, 67-120 (1977)

[4] R. X. Gao: SINGULAR PERTURBATION FOR HIGHER ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS (I), (II) (中国語) 复旦学報 Fudan Journal (Natural Science) **22** (3), 265-278 (1983) **23** (1) 85-94 (1984).

[5] R. Geel: Singular Perturbations of Hyperbolic Type. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

[6] E.M. de Jager: Singular perturbations of hyperbolic type. Niew Archief voor Wiskunde (3) 23 145-171 (1975)

[7] J. Leray: LA THORIE DE GÅRDING DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES LINEAIRES. Roma. Instituto Mathematico dell'Univ., 1956

[8] V. P. Maslov and M.V. Fedoriuk: Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics (英訳) D.Reidel 1981

[9] 坂本礼子：双曲型境界値問題 岩波書店 1978

[10] G.B. Whitham: Some comments on Wave Propagation and Shock Wave Structure With Application to Magnetohydrodynamics. Comm. Pure Appl. Math. 12 113-158 (1959)

[11] G.B. Whitham: Linear and nonlinear waves. Chap 10. Wiley, New York 1974

[12] T.T. Wu: A Note on the Stability Condition for Certain Wave Propagation Problems. Comm. Pure Appl. Math. 14 745-747 (1961)

[13] A. Yoshikawa: On the initial value problem of linear ordinary differential equations with a small parameter, to appear